Chapitre 2

Zéros des fonctions

Vidéo ■ partie 1. La dichotomie
Vidéo ■ partie 2. La méthode de la sécante
Vidéo ■ partie 3. La méthode de Newton

Dans ce chapitre nous allons appliquer toutes les notions précédentes sur les suites et les fonctions, à la recherche des zéros des fonctions. Plus précisément, nous allons voir trois méthodes afin de trouver des approximations des solutions d'une équation du type $(f(x)=0)$.

1. La dichotomie

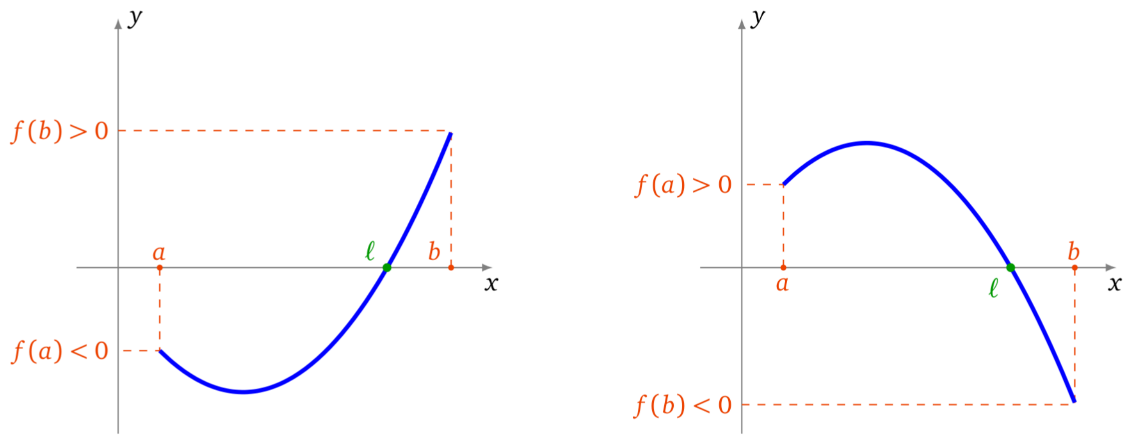
1.1. Principe de la dichotomie

Le principe de dichotomie repose sur la version suivante du ***théorème des valeurs intermédiaires*** :

Théorème 1.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

$$\boxed{\text{Si } f(a)\cdot f(b) \leqslant 0, \text{ alors il existe } \ell \in [a,b] \text{ tel que } f(\ell)=0.}$$

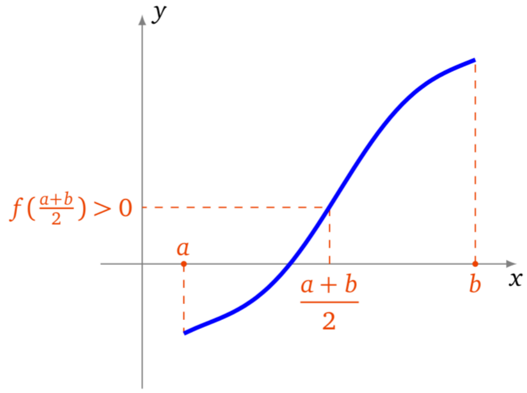
La condition $f(a)\cdot f(b) \leqslant 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (ou que l'un des deux est nul). L'hypothèse de continuité est essentielle !

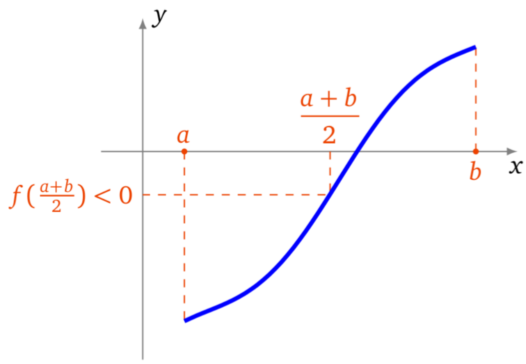


Ce théorème affirme qu'il existe au moins une solution de l'équation $(f(x)=0)$ dans l'intervalle $[a,b]$. Pour le rendre effectif, et trouver une solution (approchée) de l'équation $(f(x)=0)$, il s'agit maintenant de l'appliquer sur un intervalle suffisamment petit. On va voir que cela permet d'obtenir un ℓ solution de l'équation $(f(x)=0)$ comme la limite d'une suite.

Voici comment construire une suite d'intervalles emboîtés, dont la longueur tend vers 0, et contenant chacun une solution de l'équation $(f(x) = 0)$.
On part d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $a < b$, et $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$.
Voici la première étape de la construction : on regarde le signe de la valeur de la fonction f appliquée au point milieu $\frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) \leqslant 0$, alors il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $f(c) = 0$.
- Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) > 0$, cela implique que $f(\frac{a+b}{2}) \cdot f(b) \leqslant 0$, et alors il existe $c \in [\frac{a+b}{2}, b]$ tel que $f(c) = 0$.





Nous avons obtenu un intervalle de longueur moitié dans lequel l'équation $(f(x) = 0)$ admet une solution. On itère alors le procédé pour diviser de nouveau l'intervalle en deux.
Voici le processus complet :

- **Au rang 0 :**
  On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. Il existe une solution x_0 de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a_0, b_0]$.
- **Au rang 1 :**
  — Si $f(a_0) \cdot f(\frac{a_0+b_0}{2}) \leqslant 0$, alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$,
  — sinon on pose $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_1 de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a_1, b_1]$.
- ...
- **Au rang n :** supposons construit un intervalle $[a_n, b_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, et contenant une solution x_n de l'équation $(f(x) = 0)$. Alors :
  — Si $f(a_n) \cdot f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$,
  — sinon on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_{n+1} de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

À chaque étape on a

$$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n.$$

On arrête le processus dès que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ est inférieur à la précision souhaitée.
Comme (a_n) est par construction une suite croissante, (b_n) une suite décroissante, et $(b_n - a_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donc elles admettent une même limite. D'après le théorème des gendarmes, c'est aussi la limite disons ℓ de la suite (x_n). La continuité de f montre que $f(\ell) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. Donc les suites (a_n) et (b_n) tendent toutes les deux vers ℓ, qui est une solution de l'équation $(f(x) = 0)$.

1.2. Résultats numériques pour $\sqrt{10}$

Nous allons calculer une approximation de $\sqrt{10}$. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 10$, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\pm\sqrt{10}$. De plus $\sqrt{10}$ est l'unique solution positive de l'équation $(f(x) = 0)$. Nous pouvons restreindre la fonction f à l'intervalle $[3, 4]$: en effet $3^2 = 9 \leqslant 10$ donc $3 \leqslant \sqrt{10}$ et $4^2 = 16 \geqslant 10$ donc $4 \geqslant \sqrt{10}$. En d'autre termes $f(3) \leqslant 0$ et $f(4) \geqslant 0$, donc l'équation $(f(x) = 0)$ admet